

移流方程式に対する CIP 法の誤差評価と 浅水方程式への応用

東京大学 大学院数理科学研究科 数理科学専攻
竹村春希 (Haruki TAKEMURA) *

概要

CIP 法 (cubic interpolated pseudo-particle method) は 3 次 Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法である. 本稿では 1 次元移流方程式に対する CIP 法について安定性と収束性に関する結果を述べる. また, 同様の数学解析が spline 補間を用いた semi-Lagrange 法にも適用可能であることを示す. さらに CIP 法に splitting 法を組み合わせた浅水方程式に対する陽的で時空間高精度な数値計算法を提案する.

1 導入

CIP 法は Takewaki–Nishiguchi–Yabe [1] によって提案された移流方程式に対する時空間高精度な差分法であり, [2] の数値実験では CIP 法は L^2 ノルムに関して時空間 3 次精度の振る舞いを示すことが分かっている. Nara–Takaki [3] は定数の速度を持つ周期境界条件下の 1 次元移流方程式に対する CIP 法について, 安定性を示した. また, Tanaka et al. [4] は CIP 法の離散的な近似関数を全空間上の連続関数に置き換えたようなスキームについて, L^2 ノルムにおいては安定でないことと, 近似解の L^2 ノルムは初期値の H^1 ノルムで抑えられることを示した. さらに, [5] で連続関数を用いたスキームの収束レートなしの収束性が証明されている.

本研究では, 周期境界条件下の 1 次元移流方程式に対する CIP 法について, 時空間 3 次精度の収束性を証明した. 後で定義される重みつき H^2 ノルムに関して CIP 法が安定であることが示される. 安定性の証明において最も重要となる事実は, 3 次 Hermite 補間作用素が 2 階微分に関して L^2 射影として振る舞うということである.

Hermite 補間の代わりにスプライン補間などを用いた semi-Lagrange 法についても安定性が研究されている [6, 7]. 上で述べた 3 次 Hermite 補間の性質は, 3 次スプライン補間にも当てはまるため, Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法についても同様に安定性と収束性が示される. この方針は, Fourier 解析を用いる先行研究とは全く異なるアプローチである.

また, CIP 法は浅水方程式や KdV 方程式などさまざまな非線形変微分方程式への応用が研究されている [8, 9, 10, 11]. 複雑な流体現象を記述するモデルの数値計算において, 時空間高精度な CIP 法は有用である. 先行研究中の浅水方程式に対する CIP 法は, 数値実験によると, 時間方向に 1 次精度

* E-mail: takemura@ms.u-tokyo.ac.jp

である．一方、本稿の前半で示されるように線形の移流方程式に対する CIP 法が時間 3 次という高い精度を持っている．本稿の後半では、線形移流方程式に対する CIP 法の精度の高さを活かすため、本研究独自の「splitting 法による線形化」を取り入れて浅水方程式に対する高精度な数値計算法を提案する．

2 移流方程式に対する CIP 法

2.1 1 次元移流方程式の厳密解

次のような 1 次元移流方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + u \partial_x \varphi = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, & \text{in } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (\text{AE})$$

ただし、 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とし、与えられた移流速度 $u : \mathbb{T} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ と初期値 φ_0 は十分滑らかであるとする． $(x, t) \in \mathbb{T} \times [0, T]$ に対して、常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; x, t) = u(X(s; x, t), s), & s \in [0, T], \\ X(t; x, t) = x. \end{cases} \quad (2.1)$$

の解を $X(s; x, t)$ と定める． $X : [0, T] \times \mathbb{T} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は初期値問題 (AE) における特性曲線と呼ばれる．(AE) の厳密解は

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(X(s; x, 0), s)$$

によって与えられることが知られている．

ここで 1 次元移流方程式に対する CIP 法を導入する． $M, N \in \mathbb{N}$, $h = 1/M$, $\Delta t = T/N$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$, $t_n = n\Delta t$ ($n = 0, \dots, N$) とする．関数空間 V_h を

$$V_h := \{v \in C^1(\mathbb{T}) \mid j = 0, \dots, M-1 \text{ に対して } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \text{ は 3 次多項式}\}$$

とし、3 次 Hermite 補間作用素 $I_h^3 : C^1(\mathbb{T}) \rightarrow V_h$ を

$$I_h^3 g(x_j) = g(x_j), \quad D(I_h^3 g)(x_j) = Dg(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad g \in C^1(\mathbb{T})$$

によって定義する．ただし、 D は $\frac{d}{dx}$ を表す．特性曲線 X が (2.1) によって定義されることに注意して、 $X^n(x) = X(t_n; x, t_{n+1})$ の近似関数を以下のように定義する． $n = 0, \dots, N-1$, $x \in \mathbb{T}$ に対し $\mathbb{T}$ 上の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s; t_n, x) = u(X(s; t_n, x), s), & s \in [t_n, t_{n+1}], \\ X(t_{n+1}; x, t_{n+1}) = x. \end{cases}$$

を 3 次精度の Runge–Kutta 法で計算し、 $X^n(x)$ の近似値を $X^n(x)$ とする．問題 AE に対する CIP 法は

$$\varphi^0 = I_h^3 \varphi_0, \quad \varphi_h^{n+1} = I_h^3 (\varphi_h^n \circ X^n) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2.2)$$

と表される．先行研究の数値実験により、CIP 法の L^2 誤差は $O(\Delta t^3 + h^3)$ 程度であることが知られている．

2.2 CIP 法の数学解析

CIP 法の安定性解析が容易でない要因としては, 3 次 Hermite 補間作用素 I_h^3 は $L^p(\mathbb{T})$ ($p \in [1, \infty)$) 上の作用素として有界ではないことが挙げられる. 実際, $v \in C^1(\mathbb{T})$ が

$$\begin{aligned} v(x_j) &= 1, \quad Dv(x_j) = 0 \quad (j = 0, \dots, M-1), \\ 0 &\leq v(x) < 1 \quad (x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}), \end{aligned}$$

を満たすとして, $v_n(x) = v(x)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると, 任意の $j = 1, \dots, M$ に対して $v_n(x_j) = 1$, $Dv_n(x_j) = 0$ であるため, $I_h^3 v_n \equiv 1$, $\|I_h^3 v_n\|_{L^p(\mathbb{T})} = 1$ が成り立つ. 一方, $\mathbb{T}$ 上ほとんどいたるところで $v_n \rightarrow 0$ であることと $|v_n(x)| \leq 1$ ($x \in \mathbb{T}$) に注意すれば有界収束定理より $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が従う. 結局 $\sup_{v \in C^1(\mathbb{T})} \frac{\|I_h^3 v\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|v\|_{L^p(\mathbb{T})}} = +\infty$ を得て, 3 次 Hermite 補間作用素の非有界性が確認された.

そこで, 本研究ではノルム

$$\|g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} := \left(\|g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} \|D^2 g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \right)^{1/2}$$

に関する CIP 法の安定性や収束性を議論する. ここではこのノルムを重みつき H^2 ノルムと呼ぶ. 次の補題が CIP 法の安定性評価において重要である.

補題 2.1. 補間作用素 I_h^3 は重みつき H^2 ノルムに関して安定である. すなわち, ある正の定数 C が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\|I_h^3 g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} \leq (1 + C\Delta t) \|g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})}$$

が成り立つ.

補題 2.1 の証明には, 以下の 2 つの補題で述べられる 3 次 Hermite 補間の性質が用いられる.

補題 2.2 (Theorem 2 of [12], Corollary 3.1 of [13]). 3 次 Hermite 補間作用素 I_h^3 について, 正の定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\begin{aligned} \|(I - I_h^3)g\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq Ch^2 \|D^2 g\|_{L^2(\mathbb{T})}, \\ \|(I - I_h^3)g\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq Ch^2 \|D^2(I - I_h^3)g\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 2.3 (Lemma 3.2 of [13]). 任意の $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\int_{\mathbb{T}} D^2(f(x) - I_h^3 f(x)) \cdot D^2(I_h^3 g)(x) dx = 0,$$

が成り立つ.

補題 2.3 は, 3 次 Hermite 補間作用素が 2 階微分に関して L^2 射影として振る舞うことを意味する. すなわち, $W_h^1 := \{\partial_x^2 f \mid f \in V_h\}$ として $P_{W_h^1} : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow W_h^1$ を L^2 射影とすると

$$\partial_x^2(I_h^3 g) = P_{W_h^1}(D^2 g), \quad g \in H^2(\mathbb{T})$$

が成り立つ.

補題 2.1 の証明. 三角不等式と相加相乗平均の不等式によって

$$(a+b)^2 \leq (1+d)a^2 + \left(1 + \frac{1}{d}\right)b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad d > 0$$

を得る. これと重みつき H^2 ノルムの定義を用いて

$$\begin{aligned} \|I_h^3 g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})}^2 &= \|g + (I_h^3 g - g)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} |I_h^3 g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq (1 + \Delta t) \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \|I_h^3 g - g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} |I_h^3 g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \end{aligned}$$

を得る. ここに補題 2.2 を用いて

$$\begin{aligned} \|I_h^3 g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})}^2 &\leq (1 + \Delta t) \|I_h^3 g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + h^4 \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) |I_h^3 g - g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} |I_h^3 g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\ &\leq (1 + \Delta t) \|I_h^3 g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + h^4 \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \left(|I_h^3 g - g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 + |I_h^3 g|_{H^2(\mathbb{T})}^2\right) \end{aligned}$$

となる. さらに補題 2.3 を用いて

$$\begin{aligned} \|I_h^3 g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})}^2 &\leq (1 + \Delta t) \|I_h^3 g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + (1 + \Delta t) \frac{h^4}{\Delta t} |g|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= (1 + \Delta t) \|g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

を得て, Hermite 補間作用素の安定性が示された. $\square$

補題 2.1 を用いて, CIP 法の収束性と安定性に関する次の 2 つの定理が示される. これらが本稿の前半の主結果である.

定理 2.4 (Lemma 3.3 of [14]). $u_{xx} \in C^3(\mathbb{T} \times [0, T])$ とし, 正の定数 $C_1 > 0$ が存在して $h^4 \leq C_1 \Delta t$ が成り立ち, かつ Δt が十分小さいとする. $\varphi^n = \varphi(\cdot, t_n)$ ($n = 0, \dots, N$) とし, φ_h^n ($n = 0, \dots, N$) を (2.2) によって定義される近似関数とする. このとき, CIP 法は重みつき H^2 ノルムに関して安定である. すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\|I_h^3(g \circ X^n)\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} \leq (1 + C\Delta t) \|g\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} \quad (n = 0, \dots, N)$$

が成り立つ.

定理 2.5 (Theorem 3.11 of [14]). 定理 2.4 の仮定に加えて $\varphi_0 \in C([0, T]; H^4(\mathbb{T}))$ のとき, 正の定数 $C > 0$ が存在して

$$\|\varphi^n - \varphi_h^n\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} \leq C \left(\Delta t^3 + \frac{h^4}{\Delta t} \right) \|\varphi\|_{l^2(H^4)} \quad (n = 0, \dots, N)$$

が成り立つ. ここで, $\|g\|_{l^2(H^4)} := \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|g(\cdot, t_n)\|_{H^4(\mathbb{T})}^2 \right)^{1/2}$ とする.

2.3 スプライン補間を用いた semi-Lagrange 法

関数空間 $V_h^{2,3}$ を

$$V_h^{2,3} := \{v \in C^2(\mathbb{T}) \mid v|_{[x_j, x_{j+1}]} \text{ は 3 次多項式, } j = 0, \dots, M-1\}.$$

とし, 3 次スプライン補間作用素 $\Pi_h^3 : C^0(\mathbb{T}) \rightarrow V_h^{2,3}$ を

$$(\Pi_h^3 g)(x_j) = g(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

によって定義する (この定義によって Π_h^3 は一意に定まる [15]).

前小節では Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法である CIP 法について述べたが, 同様の数学解析が 3 次スプライン補間を用いた semi-Lagrange 法にも適用可能である. 問題 AE に対して次のような数値スキームを考える.

$$\tilde{\varphi}^0 = \Pi_h^3 \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_h^{n+1} = \Pi_h^3 (\tilde{\varphi}_h^n \circ X^n) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

補題 2.2, 2.3 に対応するようなスプライン補間の性質が知られている.

補題 2.6 (Theorems 7 and 8 of [15]). 正の定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\begin{aligned} \|\Pi_h^3 g - g\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq Ch^2 \|D^2 g\|_{L^2(\mathbb{T})}, \\ \|\Pi_h^3 g - g\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq Ch^2 \|D^2(\Pi_h^3 g - g)\|_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 2.7 (Theorem 4 of [15]). 任意の $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\int_{\mathbb{T}} D^2(f(x) - (\Pi_h^3 f)(x)) \cdot D^2(\Pi_h^3 g)(x) dx = 0,$$

が成り立つ.

CIP 法の場合と全く同様のアプローチにより, 次の定理のようにスプライン補間を用いた semi-Lagrange 法の収束性が証明される.

定理 2.8 (Theorem 4.6 of [14]). 定理 2.5 と同じ仮定のもとで

$$\|\varphi^n - \tilde{\varphi}_h^n\|_{H_{h,\Delta t}^2(\mathbb{T})} \leq C \left(\Delta t^3 + \frac{h^4}{\Delta t} \right) \|\varphi\|_{l^2(H^4)} \quad (n = 0, \dots, N)$$

が成り立つ.

3 浅水方程式に対する CIP 法

前節の内容は, 移流方程式の初期値問題という非常に単純な問題設定における CIP 法について数学解析を行なった. しかし, より興味深い複雑な現象を記述する多くの偏微分方程式は非線形の移流項を含む. その一例として浅水方程式を取り上げ, CIP 法を応用した時空間高精度な数値計算方法を提案する. スキームの構成には splitting 法による高精度化が重要である.

3.1 浅水方程式の初期値問題と数値計算スキーム

次のような 1 次元浅水方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x \phi = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T] \\ \partial_t \phi + \partial_x (u \phi) = 0, & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T] \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (\text{SWE1-1})$$

1 次元浅水方程式は 2 次元の流体運動を記述する方程式であり, $\phi(x, t)$ は水面の高さ, $u(x, t)$ は水平方向の流速を表す. $g > 0$ は重力加速度を表す定数である. 問題 (SWE1-1) に関して $W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{T})) \cap L^\infty(0, T; H^2(\mathbb{T}))$ における強解の一意的な時間局所存在が知られている [16]. 以下では (SWE1-1) の十分な滑らかな解が存在することを仮定する.

ここで $r^\pm = \sqrt{g\phi} \pm \frac{1}{2}u$ とおけば, 初期値問題 (SWE1-1) は次のように書き直せる.

$$\begin{cases} \partial_t r^+ + \left(\frac{3}{2}r^+ - \frac{1}{2}r^- \right) \partial_x r^+ = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r^- + \left(-\frac{3}{2}r^- + \frac{1}{2}r^+ \right) \partial_x r^- = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ r^\pm|_{t=0} = \sqrt{g\phi_0} \pm \frac{1}{2}u_0, \end{cases} \quad (\text{SWE1-2})$$

初等的な式変形によって, 適切な仮定のもとで (SWE1-1) と (SWE1-2) は同値な問題とみなせる.

命題 3.1. (SWE1-1) の解 $u, \phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times [0, T])$ がある正の定数 L に対して $\phi \geq L$ in $\mathbb{T} \times [0, T]$ を満たすならば, $r^\pm = \sqrt{g\phi} \pm \frac{1}{2}u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times [0, T])$ は (SWE1-2) の解である. また, (SWE1-2) の解 $r^\pm \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times [0, T])$ がある正の定数 L' に対して $r^+ + r^- \geq L'$ in $\mathbb{T} \times [0, T]$ を満たすならば, $\phi = (r^+ + r^-)^2/(4g)$, $u = r^+ - r^- \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times [0, T])$ は (SWE1-1) の解である.

さらに CIP 法と splitting 法を適用するために次の問題を導入する.

$$\begin{cases} \partial_t r_1^+ + \left(+\frac{3}{2}r_2^+ - \frac{1}{2}r_2^- \right) \partial_x r_1^- = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r_1^- + \left(-\frac{3}{2}r_2^- + \frac{1}{2}r_2^+ \right) \partial_x r_1^+ = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r_2^+ + \left(+\frac{3}{2}r_1^+ - \frac{1}{2}r_1^- \right) \partial_x r_2^- = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r_2^- + \left(-\frac{3}{2}r_1^- + \frac{1}{2}r_1^+ \right) \partial_x r_2^+ = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ r_1^\pm(x, 0) = r_2^\pm(x, 0) = \sqrt{g\phi_0(x)} \pm \frac{1}{2}u_0(x), \end{cases} \quad (\text{SWE1-3})$$

(SWE1-2) に対して未知関数の数と偏微分方程式の本数が 2 倍になっている. Splitting 法を適用する際に重要となるのは, 各偏微分方程式が前節で扱った線形移流方程式の形になっていることである. すなわち, 例えば (SWE1-3) の第一式は, 仮に r_2^+ と r_2^- が既知であるみなせば, r_1^+ に関して線形な移流方程式である.

また, (SWE1-2) と (SWE1-3) の関係について次の命題が成り立つ.

命題 3.2. (SWE1-2) の解 $r^\pm \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times (0, T))$ が一意に存在し, ある正の定数 L に対して $r^+ + r^- \geq L$ を満たすとき, (SWE1-3) の解 $r_1^\pm, r_2^\pm \in W^{1,\infty}(\mathbb{T} \times (0, T))$ が一意に存在して, $r_1^\pm = r_2^\pm = r^\pm$ を満たす.

ここで splitting 法を導入する. f, g を一般の (微分) 作用素とする. ODE (または PDE) $\partial_t u = f(u) + g(u)$ の初期値問題に対して, 2つの subproblem $\partial_t u = f(u)$, $\partial_t u = g(u)$ それぞれに対する数値解法を交互に適用して数値解を得る手法を splitting 法と呼ぶ. CIP 法を利用するために, (SWE1-3) を次の 2つの subproblem に分割する.

$$\begin{cases} \partial_t r_1^\pm + c_2^\pm \partial_x r_1^\mp = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r_2^\pm = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \end{cases} \quad (\text{SP1-1})$$

$$\begin{cases} \partial_t r_1^\pm = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \\ \partial_t r_2^\pm + c_1^\pm \partial_x r_2^\mp = 0 & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T], \end{cases} \quad (\text{SP1-2})$$

ただし, $c_k^\pm = \pm \frac{3}{2} r_k^\pm \mp \frac{1}{2} r_k^\mp$ ($k = 1, 2$) とする. 2つの subproblem では $r_1^\pm$ か $r_2^\pm$ のいずれかが片方のみが時間発展をするという点が計算の精度を確保する上で重要になる. 例えば (SP1-1) では $r_2^\pm$ は時間発展しないため, CIP 法で (SP1-1) の初期値問題を解く際には $r_2^\pm$ を位置にのみ依存する既知関数として扱うことができる.

ここで, CIP 法の時間発展を表す作用素 $S_{\text{CIP}} : \mathbb{R} \times C(\mathbb{T}) \times V_h \rightarrow V_h$ を以下のように導入する. $\Delta t > 0$, $C \in C(\mathbb{T})$, $R \in V_h$ とする. 移流速度が C であるような $\mathbb{T}$ 上の 1 次元移流方程式

$$\partial_t r + C \cdot \partial_x r = 0 \quad \text{in } \mathbb{T} \times [0, T]$$

に対する CIP 法で, 時刻 t_n における近似関数が R^n で, 1 ステップ進んだ時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における近似関数が R^{n+1} であるとする. S_{CIP} は $R^{n+1} = S_{\text{CIP}}(\Delta t, C, R^n)$ となるように定義される.

問題 (SWE1-3) を解くために, splitting 法に従って (SP1-1) と (SP1-2) を交互に CIP 法で解く. 時間 1 次精度の手法として知られる Lie splitting を利用すると次のようなスキームになる.

$$\begin{aligned} R_{L1}^{\pm, (n)} &= R^{\pm, (n)}, \quad R_{L2}^{\pm, (n)} = R^{\pm, (n)}, \\ R_{L1}^{\pm, (n+1)} &= S_{\text{CIP}}(\Delta t, C_{L2}^{\pm, (n)}, R_{L1}^{\pm, (n)}), \quad [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R_{L2}^{\pm, (n+1)} &= S_{\text{CIP}}(\Delta t, C_{L1}^{\pm, (n+1)}, R_{L1}^{\pm, (n)}), \quad [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-2) を解く} \\ R^{\pm, (n+1)} &= R_{L1}^{\pm, (n+1)}, \end{aligned}$$

ただし, $C_{Lk}^{\pm, (n)} = \pm \frac{3}{2} R_{Lk}^{\pm, (n)} \mp \frac{1}{2} R_{Lk}^{\mp, (n)}$ ($k = 1, 2$) とする.

さらに, Strang splitting による時間 2 次精度のスキームは次のようになる.

$$\begin{aligned} R_{S1}^{\pm, (n)} &= R^{\pm, (n)}, \quad R_{S2}^{\pm, (n)} = R^{\pm, (n)}. \quad t_{n+\frac{1}{2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t. \\ R_{S1}^{\pm, (n+1/2)} &= S_{\text{CIP}}\left(\Delta t/2, C_{S2}^{\pm, (n)}, R_{S1}^{\pm, (n)}\right), \quad [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R_{S2}^{\pm, (n+1)} &= S_{\text{CIP}}\left(\Delta t, C_{S1}^{\pm, (n+1/2)}, R_{S2}^{\pm, (n)}\right), \quad [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-2) を解く} \\ R_{S1}^{\pm, (n+1)} &= S_{\text{CIP}}\left(\Delta t/2, C_{S2}^{\pm, (n+1)}, R_{S1}^{\pm, (n+1/2)}\right), \quad [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R^{\pm, (n+1)} &= R_{S1}^{\pm, (n+1)}. \end{aligned}$$

ただし, $C_{Sk}^{\pm,(n)} = \pm \frac{3}{2} R_{Sk}^{\pm,(n)} \mp \frac{1}{2} R_{Sk}^{\mp,(n)}$ ($k = 1, 2$) とする.

Jia-Li [17] によって提案された時間 3 次精度の splitting 法を利用すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
R_{L1}^{\pm,(n)} &= R^{\pm,(n)}, \quad R_{L2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{S1}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{S2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \\
\text{Lie splitting} \quad &\begin{cases} R_{L1}^{\pm,(n+1)} = \text{SCIP}(\Delta t, C^{\pm,(n)}, R^{\pm,(n)}), \\ R_{L2}^{\pm,(n+1)} = \text{SCIP}(\Delta t, C_{L1}^{\pm,(n+1)}, R^{\pm,(n)}), \end{cases} \\
\text{Strang splitting} \quad &\begin{cases} R_{S1}^{\pm,(n+1/2)} = \text{SCIP}\left(\frac{\Delta t}{2}, C^{\pm,(n)}, R^{\pm,(n)}\right), \\ R_{S2}^{\pm,(n+1)} = \text{SCIP}\left(\Delta t, C_{S1}^{\pm,(n+1/2)}, R^{\pm,(n)}\right), \\ R_{S1}^{\pm,(n+1)} = \text{SCIP}\left(\frac{\Delta t}{2}, C_{S2}^{\pm,(n+1)}, R_{S1}^{\pm,(n+1/2)}\right), \end{cases} \\
R^{\pm,(n+1)} &= \frac{3}{2} \left(R_{S1}^{\pm,(n+1)} + R_{S2}^{\pm,(n+1)} \right) - \frac{1}{6} \left(R_{L1}^{\pm,(n+1)} + R_{L2}^{\pm,(n+1)} \right).
\end{aligned}$$

3.2 数値実験結果

次のような外力項つきの 1 次元浅水方程式の初期値問題について数値実験を行った.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x \phi = F_1, & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T] \\ \partial_t \phi + \partial_x(u\phi) = F_2, & \text{in } \mathbb{T} \times [0, T] \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (\text{SWE2}) \\
&g = 1, \quad \phi_0(x) = 2 + \sin(2\pi x), \quad u_0 = 0, \\
&F_1(x, t) = -\frac{\pi}{2} \cos(4\pi x) \sin(4\pi t), \\
&F_2(x, t) = \pi \cos(2\pi x) \left(\cos(2\pi t) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \sin^2(2\pi t) \right).
\end{aligned}$$

この問題の厳密解は $\phi(x, t) = 2 + \sin(2\pi x) \cos(2\pi t)$, $u(x, t) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi x) \sin(2\pi t)$ である.

外力項がある場合には, $r^{\pm} = \sqrt{gh} \pm \frac{1}{2} u$ に関する PDE

$$\partial_t r^{\pm} + c^{\pm} \partial_x r^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x, t, r^+, r^-),$$

(ただし $c^{\pm} = \pm \frac{3}{2} r^{\pm} \mp \frac{1}{2} r^{\mp}$, $\tilde{F}^{\pm}(x, t, r^+, r^-) = \frac{gF_1(x, t)}{r^+ + r^-} \pm \frac{F_2(x, t)}{2}$) に書き換えた上で, 問題を 3 つの subproblem

$$\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} + c_2^{\pm} \partial_x r_1^{\pm} = 0, \\ \partial_t r_2^{\pm} = 0, \end{cases} \quad (\text{SP2-1})$$

$$\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} = 0, \\ \partial_t r_2^{\pm} + c_1^{\pm} \partial_x r_2^{\pm} = 0, \end{cases} \quad (\text{SP2-2})$$

$$\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x, t, r_2^+(x, t), r_2^-(x, t)), \\ \partial_t r_2^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x, t, r_1^+(x, t), r_1^-(x, t)) \end{cases} \quad (\text{SP2-3})$$

に分割する. Subproblem (SP2-1), (SP2-2) には, 外力項なしの場合と同様に CIP 法を用いる.

Subproblem (SP2-3) については, 時間発展が明示的に

$$r_k^{\pm}(x, t^{n+1}) = r_k^{\pm}(x, t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{F}^{\pm}(x, s, r_{3-k}^+(x, s), r_{3-k}^-(x, s)) ds \quad (k = 1, 2)$$

と書き表されることを利用して, Simpson 則により 3.2 の右辺を計算し, 数値解を得る. 元の問題 (SWE2) の数値解を得るために, Jia-Li の時間 3 次精度 splitting 法を利用して 3 つの subproblem に対する数値解法を順次適用した. $\phi(\cdot, t_n)$ と $u(\cdot, t_n)$ を近似する数値解をそれぞれ Φ^n, U^n と書き, $r^\pm(\cdot, t_n)$ を近似する数値解 $R^{\pm, n}$ によって

$$\Phi^n = \frac{1}{4g}(R^{+,n} + R^{-,n})^2, \quad U^n = R^{+,n} - R^{-,n}$$

と表現される. スキームの L^2 誤差を

$$e_{L^2} = \left(\frac{\|\phi(t_N) - \Phi^N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\|\phi(t_N)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} + \frac{\|u(t_N) - U^N\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\|u(t_N)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} \right)^{1/2}$$

と定義する. $h \approx \Delta t$ の条件のもとでの Δt に対する L^2 誤差のプロットを図 1 に, 十分小さい h を固定したときの Δt に対する L^2 誤差のプロットを図 2 に示す. これらの数値結果においては時間方向の刻み幅に関して 3 次収束の振る舞いが確認された.

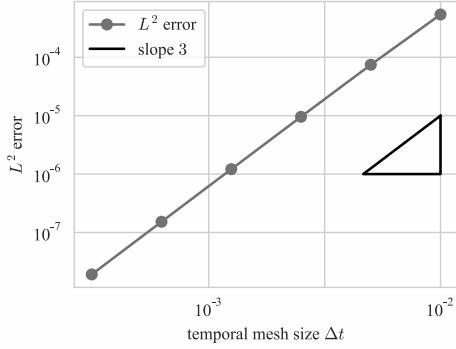


図 1 条件 $\Delta t = \frac{3}{10}h$ のもとでの Δt と L^2 誤差の関係.

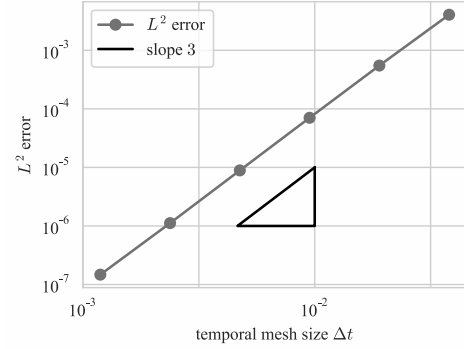


図 2 $h = \frac{1}{1000}$ のとき Δt と L^2 誤差の関係.

参考文献

- [1] H. Takewaki, A. Nishiguchi, and T. Yabe, *Cubic interpolated pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations*, J. Comput. Phys. **61** (1985), 261–268.
- [2] T. Yabe, H. Mizoe, K. Takizawa, H. Moriki, H. N. Im, and Y. Ogata, *Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme*, J. Comput. Phys. **194** (2004), 57–77.
- [3] M. Nara and R. Takaki, *Stability analysis of the CIP scheme*, IEICE Trans. Fundamentals (Japanese Edition) **85** (2002), 950–953 (in Japanese).
- [4] 田中大毅, 藤原宏志, 西田孝明, 磯祐介, 線型移流方程式を解く CIP 法の安定性 (理論), 日本応用数学会論文誌 **25** (2015), 91–104.
- [5] D. Tanaka, *Stability analysis of the CIP scheme and its applications in fundamental study of the diffused optical tomography*, Ph.D. thesis, Kyoto University, 2014.

- [6] R. Ferretti, *On the relationship between semi-Lagrangian and Lagrange–Galerkin schemes*, Numer. Math. **124** (2013), 31–56.
- [7] R. Ferretti and M. Mehrenberger, *Stability of semi-Lagrangian schemes of arbitrary odd degree under constant and variable advection speed*, Math. Comput. **89** (2020), 1783–1805.
- [8] K. Toda, Y. Ogata, and T. Yabe, *Multi-dimensional conservative semi-Lagrangian method of characteristics CIP for the shallow water equations*, J. Comput. Phys. **228** (2009), 4917–4944.
- [9] T. Yabe and T. Aoki, *A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. one-dimensional solver*, Comput. Phys. Commun. **66** (1991), 219–232.
- [10] H. Takewaki and T. Yabe, *The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations*, J. Comput. Phys. **70** (1987), 355–372.
- [11] T. Yabe, T. Ishikawa, P. Y. Wang, T. Aoki, Y. Kadota, and F. Ikeda, *A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. two- and three-dimensional solvers*, Comput. Phys. Commun. **66** (1991), 233–242.
- [12] G. Birkhoff, M. H. Schultz, and R. S. Varga, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Numer. Math. **11** (1968), 232–256.
- [13] J. Goodrich, T. Hagstrom, and J. Lorenz, *Hermite methods for hyperbolic initial-boundary value problems*, Math. Comput. **75** (2006), 595–630.
- [14] T. Kashiwabara and H. Takemura, *Error estimates of the cubic interpolated pseudo-particle scheme for one-dimensional advection equations* (preprint), DOI: 10.48550/arXiv.2402.11885.
- [15] M. H. Schultz and R. S. Varga, *L-splines*, Numer. Math. **10** (1967), 345–369.
- [16] J.-M. Rakotoson, R. M. Temam and J. J. Tribbia, *Remarks on the nonviscous shallow water equations*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 2969–2998.
- [17] H. E. Jia and K. T. Li, *A third accurate operator splitting method.*, Math. Comput. Modelling **53** (2011), 387–396.